Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université

Elizabeth Montoya Delgadillo, Rosa Elvira Páez Murillo, Laurent Vivier

Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université

Rosa Elvira Páez Murillo[1], Elizabeth Montoya Delgadillo[2] et Laurent Vivier[3]

[1]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Mexique, rosa.paez@uacm.edu.mx;

[2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili, elizabeth.montoya@pucv.cl;

[3]Laboratoire de Didactique André Revuz–Université Paris Diderot, France, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Les résultats que nous exposons dans cette étude proviennent d'un questionnaire proposé en début d'université au Chili, en France et au Mexique sur la notion de tangente à une courbe. Nous relevons les conceptions spontanées des étudiants en fonction des registres utilisés. Nous précisons ces conceptions en analysant des productions représentatives avec les perspectives ponctuelle, locale et globale, essentielle en analyse. Nous concluons par une discussion sur les Espaces de Travail Mathématique (ETM) personnel.

Mots clés : Conception, perspectives, tangente, ETM personnels.

INTRODUCTION

Dans cette étude [1], nous nous intéressons aux conceptions spontanées d'étudiants sur la notion de tangente. Nous analysons la première question d'un test écrit de six questions sur la notion de tangente : « **Pour vous, qu'est-ce qu'une droite tangente ?** ». Nous avons recueilli les réponses d'étudiants en première année d'université : 14 étudiants de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chili), 9 de l'Université Paris Diderot (France) et 19 de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (Mexique) [2].

La notion de tangente apparaît dès le premier cycle secondaire dans les trois pays dans le cas spécifique du cercle. La notion réapparaît avec la dérivation pour les tangentes aux courbes représentatives des fonctions : au grade 11 en France ainsi que dans certains lycées chiliens et mexicains, alors que cette définition n'est pas aux programmes d'études officiels de ces deux pays. Finalement, en début d'université, la définition par la dérivation est presqu'exclusivement utilisée dans les trois pays.

Nous exposons dans un premier temps une typologie des conceptions de la notion de tangente qui ont été identifiées dans des études précédentes (Sierpinska, 1985 ; Castela, 1995 ; Biza y Zachariades, 2010 ; Páez et Vivier, 2013 ; Montoya et Vivier, 2015 ; Vincent et al. 2015) et qui constitue une analyses a priori des réponses possibles. Nous relevons, avec cette classification, les conceptions que les étudiants expriment spontanément. Dans un second temps, nous précisons ces conceptions en identifiant le ou les registres (Duval, 2006) utilisés, les perspectives (locale, globale et ponctuelle) qui apparaissent dans les traces écrites. Ces éléments permettent de préciser, en partie, l'ETM personnel (Kuzniak, 2011) des étudiants constitué des composants de l'ETM qui sont activés spontanément. Néanmoins, l'ETM personnel ne s'y réduit pas et, souvent, le travail sur des questions plus spécifiques montre que d'autres composants sont alors activés, parfois sans lien.

CONCEPTIONS DE LA NOTION DE TANGENTE

Nous utilisons le terme *conception*, dans le sens de Duroux (1983) pour nous référer aux connaissances disponibles d'un sujet pour un concept mathématique et dans une situation donnée. Pour cette étude, une *conception* est associée avec des images mentales, des caractéristiques, des propriétés et des procédés associés au concept en jeu. Une conception peut apparaître dans une certaine situation, mais pas dans d'autres où peuvent apparaître d'autres conceptions ce qui peut laisser apparaître un manque d'articulation ou de cohérence, voire des contradictions.

Dans les recherches comme celles énoncées en introduction, il a été identifié les idées ou connaissances qu'ont les étudiants ou professeurs pour la notion de tangente. Dans la suite, nous proposons une typologie de conceptions issues des recherches précédentes [3] mais qui nous permet de proposer une analyse des conceptions spontanées des étudiants. Notre idée directrice est de percevoir ces conceptions en deux blocs : un premier bloc issu du domaine de la géométrie, directement lié à la tangente à un cercle, et un deuxième bloc issu du domaine de l'analyse, directement lié à la dérivation.

Conceptions issues de la géométrie

Unique Point d'Intersection (UPI). Cette conception est fondée sur des connaissances de la géométrie en identifiant la droite tangente comme la droite qui n'a qu'un seul point d'intersection au cercle, comme par exemple pour l'étudiant **CIF4** (Figure 1) :

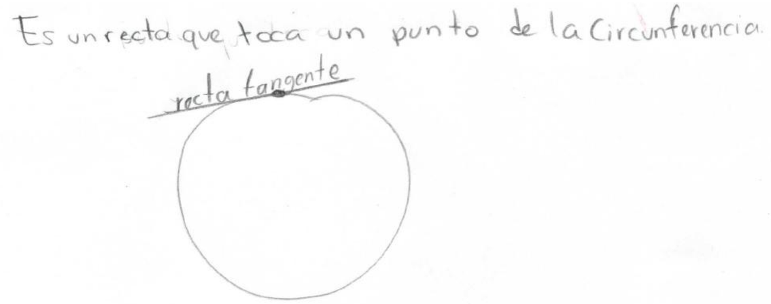

Figure 1. Etudiant CIF4 – *C'est une droite qui touche un point du cercle ; droite tangente.*

Cette conception s'étend à d'autres courbes, comme une droite qui *touche*, *coupe* ou *frôle* la courbe en un seul point (voir Figure 2). Il y a, en quelque sorte, des cas de *dégénérescence* de la conception UPI, comme lorsqu'un étudiant ne trace qu'une demi-droite ou un segment pour éviter que la trace graphique ne recoupe la courbe (presque comme dans la figure 2), ou encore une droite qui coupe de manière non tangente la courbe, pour s'adapter à la situation. Toutefois, si ces réponses sont fréquentes lorsque l'on demande de tracer une tangente à des étudiants (Montoya et Vivier, 2015), ces situations sont ici soigneusement évitée par les étudiants puisque ce sont eux qui choisissent la courbe et le point de tangence. Cela dit, certains étudiants ont réduit, en partie tout du moins, le conflit cognitif relatif au fait que la tangente recoupe la courbe comme **C3** (figure 3).

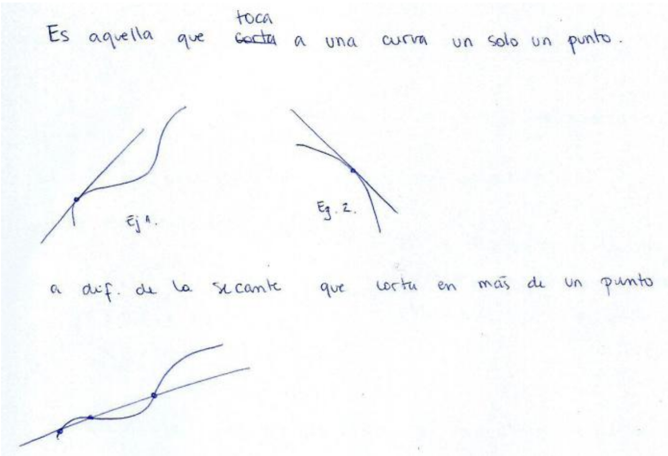

Figure 2. étudiant C3 – *C'est celle qui touche une courbe en un seul point ;à la dif. de la sécante qui coupe en plus de un point.*

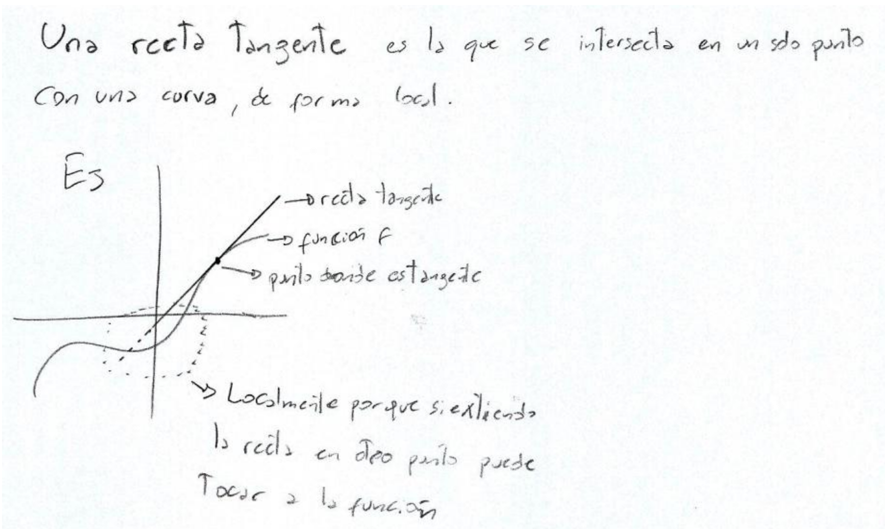

Figure 3. étudiant C11 - *Une droite tangente est celle qui s'intersecte en un seul point avec une courbe, de forme locale. C'est ; droite tangente ; fonction f ; point où c'est tangent ; localement parce que s'étendant, la droite peut toucher en un autre point la fonction*

La conception UPI s'accompagne du fait que l'unicité du point en commun entre la tangente et la courbe n'est requise que localement autour du point considéré, dans un voisinage. Ici, le jeu local-global (voir section suivante) apparaît comme un élément important pour réduire les conflits cognitifs relatifs à la conception UPI. On note, malgré tout, le tracé de la droite qui passe en ligne non continue, ce qui marque une incertitude, un changement de statut (nous avons rencontré par ailleurs ce type de réponse en pointillés qui permet d'alléger le conflit cognitif).

Perpendiculaire au rayon (PR). Quand il est explicité avec des mots ou avec des représentations graphiques ou formelles la relation de perpendicularité entre la tangente et le rayon du cercle. L'étudiant **F8** (figure 4) présente cette conception avec également une cohérence, notamment par le codage des angles droits, avec la conception *Tangente Horizontale* (voir ci-dessous) malgré une confusion de langage entre parallèle (à l'axe des abscisses) et perpendiculaire (à la courbe).

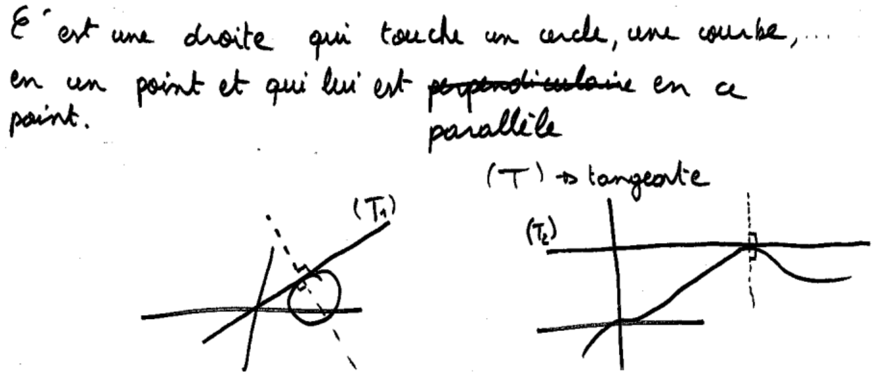

Figure 4 : Etudiant F8, conceptions PR (à gauche) et TH (à droite)

Conceptions issues de l'analyse

Pente (P). Cette conception réfère à l'utilisation du mot « pente » pour décrire la tangente. Des degrés de raffinement existent, comme l'exprime par exemple CDF1, où nous voyons, implicitement, l'expression d'une approximation affine de la courbe.

Etudiant **CDF1** : *Une droite tangente à une courbe en un certain point d'elle, est une droite qui au moment de passer par le dit point, a la même pente que la courbe*

Processus de Dérivation (PD). La droite tangente est la droite qui passe par un point de la courbe et dont la pente est le nombre dérivé obtenu par dérivation (implicitement par un travail formel). De même, des raffinements, dépendant du registre, peuvent apparaître comme l'étudiant **F2** qui utilise le langage naturel à la différence de l'étudiant **F1** qui utilise le registre algébrique. On peut également noter que **F2** présente les conceptions UPI et P.

Etudiant **F2** : *Une droite tangente est une droite qui ne touche une courbe en un seul point et qui a pour pente celle du point quel touche. Elle est représenté par la dérivé.*

Etudiant **F1** : *On définit la droite tangente d'une fonction à un point x_0*

$$\rightarrow y = f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$$

Il s'agit en fait d'une approximation de degré 1 de la fonction f au voisinage de x_0.

Tangente Horizontale (TH). Quand il est fait mention de maximum ou de minimum de la courbe pour expliquer la notion de tangente, comme dans le cas de **F8** dans le registre graphique ou l'étudiant **F6** dans le registre de la langue naturelle (LN) :

Etudiant **F6** : *C'est une droite qui passe par un minimum ou un maximum local de la courbe d'une fonction*

En terme général, nous présentons dans la table suivante les conceptions identifiées dans les trois groupes de l'étude. Il est important de mentionner que des étudiants présentent plusieurs conceptions spontanées. Mais il existe aussi des étudiants qui présentent d'autres conceptions que celles mentionnées ci-dessus ou, comme pour l'étudiant suivant, qu'il est difficile de classer par manque d'information (bien qu'elle soit en apparence correcte) :

Etudiant **CDF5** : *C'est une droite qui touche une courbe au point donné*

La table 1 synthétise l'ensemble des réponses ; certains étudiants présentent plusieurs conceptions, souvent dans des registres différents, alors que d'autres n'ont pas répondu à la question. Cela dit, les deux blocs apparaissent équilibrés : UPI et PR d'un côté, des conceptions de la géométrie, et P, PD et TH de l'autre, des conceptions de l'analyse (nous associons la conception P à PD du fait qu'il y a l'idée de définir un nombre au point considéré). Les différences entre les trois populations peuvent s'interpréter comme des différences d'enseignement voire de contexte. Mais il faudrait une étude avec plus d'étudiants pour pouvoir conclure sur ce point.

Étudiants	UPI	PR	P	PD	TH	Réponses non identifiées	Sans réponse
France (9)	4	2	2	5	2	0	0
Chili (14)	9	0	3	1	0	0	3
Mexique (19)	2	1	7	0	0	1	8
Total (42)	15	3	12	6	2	1	11

Table 1 : Typologie des conceptions, ensemble des réponses par population

PERSPECTIVES ASSOCIEES A LA NOTION DE TANGENTE

Ces conceptions de tangentes s'affinent ou se *déconstruisent* avec la notion de *perspectives*, terme que nous reprenons de Vandebrouck (2011) pour les fonctions (voir aussi Maschietto, 2003 ; Rogalski, 2008) : perspectives locale, ponctuelle, globale (voir également Kuzniak, Montoya, Vandebrouck et Vivier, 2015 ; Montoya et Vivier, 2015). Ces perspectives s'expriment de prime abord dans différents registres de représentation, mais ce n'est pas la seule source d'influence.

Pour le cas de la tangente, nous identifions : la *perspective ponctuelle* par la nécessité de considérer le point de la courbe où on veut la tangente ; la *perspective locale* par une référence aux liens qu'entretiennent la courbe et une tangente en un voisinage, ou autour, du point en question (nous différencions l'utilisation des mots « couper » et « toucher ») ; et la *perspective globale* par l'identification de la tangente comme une droite ou une ligne. On a ainsi, dans l'ordre des trois perspectives : un point, une direction et une droite (ou portion de droite).

Ces trois perspectives s'expriment dans chaque registre de représentation. C'est le cas par exemple de **CDF5** où les trois perspectives apparaissent (apparemment correctement) dans le registre LN. Des perspectives peuvent être influencées par les conceptions ce qui entraîne un contrôle ou une adaptation de certaines perspectives. Par exemple, la conception UPI peut entraîner une réponse dans le registre graphique d'une demi-droite pour une tangente afin que la ligne tracée ne recoupe pas la courbe : la perspective ponctuelle guide le travail et entraîne une adaptation de la perspective globale. On trouve ainsi ce type de réponse, même par des enseignants, lorsqu'il est demandé de tracer une tangente à une courbe (Figures 5).

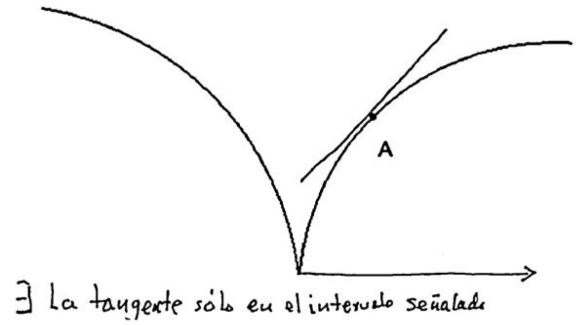

Figure 5a. Réponse d'un professeur mexicain (Páez et Vivier, 2013)

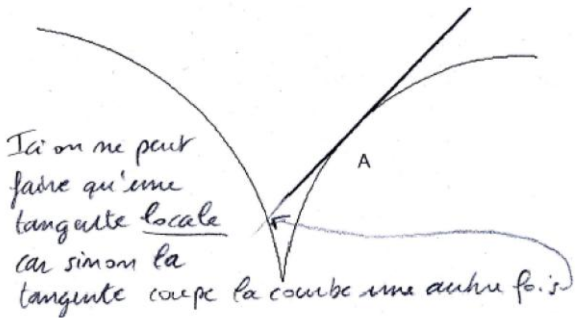

Figure 5b. Réponse d'un professeur français

A la suite, nous décrivons les perspectives qui peuvent apparaître dans chaque conception mentionnée en nous appuyant sur les exemples de réponses donnés. Nous précisons les registres utilisés et les jeux entre les perspectives qui peuvent entraîner des adaptations par une *pression* d'une perspective sur une autre.

Conception UPI

On note que la conception UPI n'a pas été exprimée dans le registre algébrique (Ralg). Nous reprenons les productions des figures 1, 2 et 3. **CIF4**, avec le registre LN, présente les trois perspectives : c'est une droite (globale) qui touche (locale) en un point (ponctuelle) la courbe. Les trois perspectives semblent s'enchaîner et s'articuler sans s'influencer. Il en est de même dans le registre graphique (Rg), même si l'on peut penser que, dans d'autres situations, des problèmes surgiraient.

On note pour **C3** une différence dans LN avec le mot « solo » qui semble indiquer une sorte d'injectivité entre droite et point de la courbe où la droite est tangente, mais cela est précisé à la suite dans LN, avec le mot « corta » et non « toca », et dans Rg où l'on note que ce ne sont pas les points de tangence qui comptent. Mais les points en communs, d'intersection. La perspective ponctuelle est prépondérante.

Pour **C11**, la perspective locale semble disparaître de LN, mais il ne fait aucun doute qu'elle est présente dans Rg, la droite coïncidant localement avec la courbe, ainsi que par le caractère local de la propriété de tangence (que deviendrait cette conception avec une fonction affine ou du type $x^2\sin(1/x)$ en 0 ?).

Nous avons déjà remarqué (Montoya et Vivier, 2015) la fréquence d'une réponse issue d'une conception UPI où la perspective ponctuelle influence la perspective globale dans Rg avec une réponse constituée d'une partie d'une droite (demi-droite par exemple). On remarque ici, les étudiants étant maître de la courbe proposée, que **CIF4** et **C3** donnent des cas de tangence où la tangente ne recoupe pas la courbe et si **C11** propose un tel cas, il n'en reste pas moins que le prolongement est en pointillés. Nous voyons ici, dans la production même dans Rg (courbe et tangente) une influence de la perspective ponctuelle sur la perspective globale.

Conceptions PR et TH

La conception PR fait souvent référence à un cercle, comme dans le premier graphique de la figure 4 pour **F8**, mais on relève ici une cohérence avec la conception TH. La perspective locale n'est a priori pas présente car la direction est donnée par la perpendiculaire, même si l'on peut penser qu'il y a vraisemblablement un contrôle visuel par la perspective locale. Néanmoins, dans le cas de **F8** on relève de manière claire la perspective locale avec le mot « touche » ainsi que dans le graphique de droite avec le point de maximum. De plus, il est vraisemblable que le tracé ait été produit avec la perspective locale, l'angle droit ayant été marqué ensuite. On peut ainsi penser que les trois perspectives sont présentes et sont articulées, même si la notion de tangente reste étroite.

Pour **F6**, il semble y avoir beaucoup d'implicites, surtout pour la perspective locale. En effet, elle semble absente (on peut faire passer une infinité de droites par un point, fut-il un point de minimum) alors que les deux autres perspectives sont explicitement présentes. Mais on peut penser que le travail sur les fonctions favorise largement l'association "tangente horizontale – dérivée s'annulant – extremum" avec les représentations graphiques associées. Il est fort possible que pour cet étudiant la droite tangente est horizontale en un point d'extremum. Il n'en reste pas moins que la perspective locale n'est pas explicite.

Conceptions P et PD

Dans le cas de **CDF1**, on relève explicitement les perspectives ponctuelle et globale, mais il est difficile de se prononcer sur la perspective locale, sans autre information. Il se peut que le mot *pente* soit pensé en terme de « courbe localement rectiligne » (la propriété de *micro-linéarité* de Maschietto (2003)), auquel cas la perspective locale est bien présente, ou bien en terme de dérivation ou d'association d'une pente à chaque point de la courbe, auquel cas il n'y aurait pas de perspective locale, la perspective ponctuelle donnant la *pente*.

Tout comme la conception P, dans la conception PD la perspective locale peut être occultée, la direction de la tangente étant donnée par le nombre dérivé qui peut provenir uniquement d'une perspective ponctuelle : la perspective ponctuelle semble prépondérante dans le processus de dérivation qui masque la perspective locale. Néanmoins, la perspective locale peut réapparaître, avec un complément. Pour **F2** (voir ci-dessus), la conception UPI dans LN permet d'expliciter une perspective locale (« touche ») qui n'apparaît pas avec le simple mot « dérivé ». Pour **F1** (voir ci-dessus), la première partie montre les perspectives ponctuelles et globales dans Ralg, mais cela est complété par une précision sur l'approximation d'ordre 1 de la fonction au voisinage du point considéré qui marque une perspective locale.

CONCLUSION : DES CONCEPTIONS AUX ETM PERSONNELS

Dans cette étude, nous avons présenté cinq conceptions illustrées par des productions d'étudiants de première année d'université. Il s'agit de conceptions spontanées à une unique question demandant d'expliquer ce qu'est une tangente, elles proviennent essentiellement de deux domaines : la géométrie et l'analyse. L'algèbre est absent des productions des étudiants alors que ce domaine pourrait faire une transition intéressante entre la géométrie et l'analyse (Vivier, 2013). Ces deux domaines mettent en jeu des connaissances différentes. Les conceptions UPI et PR reposent pour l'essentiel sur une connaissance géométrique, courbe et tangente ont un seul point en commun, et les conceptions PD et TH, auxquelles on ajoute la conception P, reposent essentiellement sur la dérivation. Néanmoins, les objets de notre étude sont communs, les courbes et les tangentes. Ainsi, au lieu de considérer deux domaines différents, on peut également considérer que les deux blocs de conceptions sont relatifs à l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) de l'analyse relatifs à deux paradigmes différents (Kuzniak et al., à paraître) identifiés comme le paradigme de l'analyse géométrico-arithmétique et le paradigme de l'analyse calculatoire.

Dans l'identification des conceptions spontanées, les étudiants ont le choix des registres et des exemples pour les exprimer. On remarque en particulier le soin apporté aux exemples dans Rg pour illustrer une conception UPI : pour le cas choisi, la tangente ne recoupe pas la courbe alors qu'elle le pourrait pour un autre point (figure 2). La notion de conception nous paraît limitée pour analyser ce phénomène et c'est pour cela que nous avons introduit les perspectives car elles permettent de rentrer plus finement dans les conceptions. De plus, elles permettent de comprendre le travail d'un étudiant comme **C3** (figure 2) : le choix du point (perspective ponctuelle) a été effectué afin que la tangente (perspectives locale puis globale) ne recoupe pas la courbe pour s'accorder avec la conception ou avec une connaissance géométrique en jeu. Le modèle des ETM est un système qui prend notamment en compte une genèse sémiotique liant les signes et le processus de visualisation et les connaissances théoriques. Ainsi, il peut permettre de mieux comprendre le jeu entre les perspectives, leurs articulations, ici dans le registre graphique.

Avec une conception UPI on relève souvent une articulation des trois perspectives (bien que pas toujours correcte), il n'en est néanmoins pas de même pour les conceptions P et PD. En effet, la perspective locale est en générale absente au profit de la perspective ponctuelle puisqu'au point considéré on associe un nombre (voir **CDF1**). Néanmoins, la perspective locale peut apparaître avec un complément comme pour **F2**, avec le mot « touche », ou **F1**, avec l'approximation d'ordre 1 (voir ci-dessus).

On remarque que les conceptions UPI et PR s'accompagnent fréquemment d'un graphique (avec ou sans repère) mais rarement d'une expression algébrique alors que c'est l'inverse pour P et PD qui s'accompagnent rarement d'un graphique mais où on peut voir des expressions algébriques, comme pour **F1** avec l'équation de la tangente, ou simplement la mention d'une fonction *f*. Cela conforte l'idée qu'il s'agit d'un travail dans deux paradigmes distincts mettant en avant des signes différents.

La juxtaposition de conceptions peut-être mieux comprise dans le modèle des ETM. Par exemple, **F2** présente trois conceptions : UPI, P et PD. Le lien entre P et PD est explicite et constitue une connaissance du référentiel théorique de l'ETM personnel de **F2** : la pente de la tangente est égale au nombre dérivé. En revanche, il ne semble pas y avoir de lien avec UPI qui semble juxtaposée aux deux autres et que nous interprétons come un défaut dans l'articulation des deux paradigmes en jeu.

Il est significatif que la conception *Limites des Droites Sécantes* n'apparaisse pas explicitement dans les réponses des étudiants malgré son utilisation fréquente pour introduire la dérivation. Les conceptions liées à la dérivation apparaissent souvent, ce qui n'est pas étonnant car le travail porte beaucoup sur celles-ci, mais on remarque que les conceptions UPI persistent dans les réponses spontanées des étudiants.

Nous n'avons pas analysé ici la suite du questionnaire qui proposait systématiquement une expression algébrique d'une fonction, parfois accompagné d'un graphique. Il est à noter qu'alors le travail s'uniformise beaucoup avec une quasi-exclusivité du processus de dérivation, même si d'autres procédures sont plus efficaces et sans possibilité de contrôle par d'autres conceptions ou par un changement de paradigme (notamment avec un graphique). Ainsi, avec l'utilisation de la tangente pour introduire la dérivation, il semble que le travail proposé aux étudiants réduit la notion de tangente à la dérivation. Pourtant, il s'agit d'une notion mathématique très riche qui ne peut se limiter au seul point de vue proposé par la dérivation. Il nous semble que non seulement l'enseignement universitaire perd ainsi une richesse, des occasions de travail mathématique riche et intéressant, mais qu'en plus on ne permet pas aux étudiants de raffiner leurs conceptions, leurs ETM personnels, comme nous l'avons vu avec l'expression des réponses spontanées.

NOTES

1. Cette étude s'inscrit dans le projet PI 2014-39 de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México et la Secretaria de Ciencia, Tecnología e Innovación (SECITI) au Mexique et dans le projet ECOS-Sud C13H03 au Chili et en France.

2. Les étudiants chiliens sont C1, C2, etc., les français F1, F2, etc. et les mexicains CIF1, CIF2 etc. ou CDF1, CDF2 etc.

3. La liste n'est pas exhaustive, on ne peut jamais l'être totalement, chaque sujet ayant sa propre conception.

BIBLIOGRAPHIE

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*, 218-229.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 7-48

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: Difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x, 3,* 43-67.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck F., Vivier L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, *Actes de la 18ième école d'été de didactique des math.,* à paraître.

Maschietto, M. (2003). Le rôle de la calculatrice dans le d´enveloppement du langage autour du jeu global / local. Lagrange J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista, taller, *Proceedings of CIAEM XIV*, 5-7 june 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Páez, R. & Vivier, L. (2013). Teachers´ conceptions of tangent line. *The journal of mathematical behavior*, *32*, 209-229.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global : Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61-87), PUF, Paris.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 149-185.

Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V. & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(5), 641-657.

Vivier, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines, *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, *44*(5), 711-717.